先導的大学改革推進委託事業
「教科専門と教科教育を架橋する教育研究領域の構成案」

「算数・数学科内容学」構成案

担当者
鳴門教育大学　松岡　　隆（数学）（チーフ）
鳴門教育大学　秋田　美代（数学教育学）
鳴門教育大学　佐伯　昭彦（数学教育学）
上越教育大学　中川　　仁（数学）
兵庫教育大学　濵中　裕明（数学）

「算数・数学科内容学」構成案【要旨】

1．教員養成における算数・数学科に関する教科の専門性

算数・数学科の対象である数学は，現実の事象から数量，図形などの抽象的概念を抽出し，それら概念相互の関連を明らかにするものである。教員養成では，理学部におけるような数学そのものの研究を目指した内容ではなく，教科内容の背景をなす数学体系を主に扱う。また，数学と現実の事象との関連も重要な要素となる。

2．育成すべき資質・能力

教員養成においては，以下の資質・能力の育成に資するものを内容として選ぶ必要がある。

「人間にとっての数学の存在意義・重要性を理解した上で，学習指導要領の内容を単に受動的に受け入れるのではなく，算数・数学教育の意義を深く理解し，正しい数学観の元で指導できる。」

特に，以下の能力が重要である。

・学校数学の背景にある数学理論を理解し，学習項目間の関連や系統性を捉えて重点を置くべき部分を把握できる。
・数学と現実の事象との繋がりを理解し，事象を数学的に解釈・表現して問題解決する授業を構成できる。
・知的好奇心を呼び起こし学問的にも意味ある教材を工夫してつくることができる。
・知識探究・創造型の授業が実践できる。
・抽象的思考に慣れ，思考を論理的に正しく展開することができる。

3．教科内容の構成

上記の資質・能力の育成を図るため，内容構成において以下の 6 つの要素を重視する。

a 数学の体系性	b 小学校算数・中学校数学との関連	c 事象との関連
d 数学の実用性	e 数学の文化的価値	f 探究的活動

小学校教員養成における算数科では，これら 6 つの要素を取り入れ，以下のように内容を構成する。

【a 数学の体系性，b 小学校算数との関連】

ア．算数の背景をなす数学体系について理解し，算数の各内容の元をなす数学概念を明確にできるような具体的内容を取り入れる。

効果：数学概念の表面的な現われ方に影響されない数学的本質に基づいた指導ができる。

イ．算数の内容が，後に数学としてどのように拡張・発展するかが理解できる具体的な内容を取り入れる。

効果：小学校以降の数学学習に対する見通しも備えた授業構成ができる。また，児童が算数の中で不思議や疑問に感じることは，より高度の数学に繋がるものであるが，発達段階に合わせて疑問に分かりやすく答えることができる。

【c 事象との関連，d 数学の実用性】

抽象と具体の関係を重視することの必要性やその捉え方が理解できる具体的な内容を取り入れる。

効果：以下の問題傾向を改善する指導ができる。

・事象を一旦抽象化し形式的な処理に慣れると，事象との結びつきを意識しなくなる。
・逆に，具体的な事象の表面的な内容に捕らわれて，異なる事象の中にある共通な構造に目が向かず，数学の有用性に気付かない。

【e 数学の文化的価値】

面白さや美しさも含め，教材がもつ文化的価値や構造の美しさを理解できる具体的な内容を取り入れる。

　　効果：児童の知的好奇心や問題解決力を高めることができる。

【ｆ探究的活動】

教材の数学的な考え方や特性が理解できる具体的内容を取り入れる。

　　効果：探究・創造型の授業展開ができる。

中学校教員養成における数学科の内容も，同様に６つの要素を重視して構成する。

４．期待される成果

現在各大学の小学校教員養成における算数科の教科専門授業の内容は，教養としての数学紹介から，範疇外の指導法を扱うものまで雑多であり，その理想像は未だ明確ではない。また，教科専門授業用に作られた教科書も問題なしとはいえない。実際，算数の理解を深めるための数学理論が扱われてはいるが，学生がそこに授業実践との繋がりを見出すことは難しく，理論の説明が概ね紹介程度に終わるため数学理解力の向上面に限っても効果は薄い。

中学校教員養成における数学科の教科専門授業に関しては，学校数学や現実の事象とのつながりなど教員養成で望まれる要素に触れていないものが多い。それらの要素を考慮しているものも少なくないが，最も望ましい内容・方法は何かについての徹底した考察は経ていないと思われる。

算数・数学科の教科内容学に関する本研究によって，数学の理解を深化させ，その効果が実践に現れるような内容が構築でき，算数・数学の本質的要素を理解し実践力を高めた教員の養成が実現できると考える。

「算数・数学科内容学」構成案

1　教科内容学研究の視点と方法

1.1　視点１　算数・数学科の教育研究の実情

1.1.1　小学校教員養成

⑴　シラバスより

各大学のシラバスから見えてくる実情と問題点を述べる。以下に示すように，各大学の授業内容はかなりまちまちである。いずれも重要な要素を押さえており，肯定的に捉えれば算数の深さ・豊かさを示しているともいえる。しかし，算数に関する通常半期の教科専門授業で扱える分量は限られており，優先的に取り上げるべき要素は何かを明らかにする必要がある。

各大学で行われている授業は６つの類型に分かれる。各類型に含まれる授業のうち幾つかを選び，それらの概要・ねらいを1行程度に略して示した。

①　算数の背景をなす数学を知り，見方・考え方を広げるもの
- 算数の内容の数学的背景について解説し，数・図形・関数などの見方や考察の仕方を広げる。
- 技術としての計算の理論的背景を理解し，より広い数学的視野を獲得する。
- 算数の背景となる数学を理解し，教材研究を行う基礎となる教養を身につける。
- 数の成り立ち・性質と図形の対称性と群の考え方を学ぶ。

②　算数が扱う内容を深めるもの
- 算数で扱われる数と計算について理解する。また日常生活で目にする数について知る。
- 自然数，約数と倍数，図形の数学について解説する。
- 集合と写像，整数の基本性質を解説する。
- 「数と計算」領域の背景にある数学との繋がり，算数的活動を通した学習の重要性を理解する。
- 算数教科書との関連付けを行いながら算数の背景にある数学を解説する。

③　数学の基礎をなす部分の習熟を目的とするもの
- 公式がなぜ成り立つのかを検証する力を養成する（注：具体的内容は「集合と論理」である。）

④　数学的考え方の養成を目的とするもの
- 算数教材の背後にある数学を知って，算数の難しさを知る。
- 指導者として備えるべき数学的考え方を習得する。
- 図形の敷き詰めと数表に関する算数授業の概要と背景にある数学的見方・考え方
- 学校数学の範囲で扱える問題の解決をとおした数学的見方・考え方，数学の面白さ，価値について考察する。

⑤　教材研究を中心とするもの
- 面積に関する素材を中心にした教材研究
- 算数の内容をより深く数学的に考察・探究し，教材開発する視点と技能を身につける。

⑥　教科教育に近いもの
- 算数・数学教育の歴史を考察し，学校数学および数学の観点から学習指導要領を確認・習熟する。
- 算数教育に携わる者に必要な知識，教材の扱い方，論理性，教育法との関連
- 算数のいくつかの指導単元の指導法を学ぶ。

⑵　教科書について

算数の教科専門授業用に作られている大学教科書には，算数の背景をなす数学の体系を解説しているもの

もあるが，授業実践との係りについての記述がなく，学生が数学体系の学習の意義を感じることは難しい。しかも，数学概念の習得にはかなりの時間と集中を必要とするにも拘わらず，数学の諸概念が概説的に広く浅く扱われているに過ぎないため，学習後に記憶に留まる内容は少ないと思われる。

以上⑴，⑵の考察より，数学の理解を深化させ，その効果が授業実践に現れるような内容の研究開発が望まれる。

1.1.2　中学校教員養成

学校数学や現実の事象とのつながりなど教員養成で望まれる要素に触れていないものが多い。一方，それらの要素を考慮しているものも少なくないが，最も望ましい内容・方法は何かについての徹底した考察は経ていないと思われる。

例として，教員養成系で広く扱われている「初等幾何」に関するシラバスの中からいくつかを選んで，その授業概要・目標を紹介する。これらはいずれも，初等幾何の理解およびそれを通しての能力開発を目的としていると考えられる。学校で学ぶ初等幾何内容についての学問としての取り扱いはあるが，教科内容の観点からの分析・考察は行われていない。また，重要な要素の一つである実生活とのつながりに該当する内容は見られない。

●シラバス例１

概要	幾何学の基礎として身に付けねばならない基礎知識の習得を目指す。最初に，大学で数学を学ぶ上で必要な集合と写像の一般論を学ぶ。次に，中学高校で学んだ初等幾何学を復習し，証明の仕方・書き方を学ぶ。さらにユークリッド原論の第五公理についての問題点と歴史を学び，数学における公理の重要性を理解する。次に球面幾何学を学ぶ。最後に円錐を平面で切ったときにできる切り口の曲線を調べる。
到達目標	１．集合と写像の基礎を理解し使えること。２．証明をきちんと論理を組み立てて述べることができること。３．第五公理のどのような点が歴史上問題になり，どのように解決したかを説明できること。４．球面幾何とユークリッド幾何における三角法の違いを理解すること。５．円錐曲線の定義とその性質を理解できること。

●シラバス例２

授業の目的	■ねらい　この講義では中学校・高等学校で学んだ，初等幾何学の面白さを再確認し，数学的・論理的な思考を高めます。 ■カリキュラム上の位置づけ　この授業では，主に初等幾何学について講義する。古典幾何学の世界を楽しみます。
科目の達成目標（達成度）	初等幾何とは古典的なユークリッド幾何が主体であるから，ユークリッド幾何の別名のように使われる場合もある。うまい補助線が見つかって問題が解けたときのよろこび，たのしさについてはよく知られている。また，初等幾何は創造性の育成に最適であると言われている。幾何は自分で図形を作り，その性質を研究して新しい図形の性質を発見することが容易で，それは発見の喜びにつながる。そして論理的な思考力もそれに伴って発達していく。初等幾何を学ぶことによって論理的な思考力を養ってもらいたい。

●シラバス例３

<u>授業の概要</u>　幾何学体系の原点から，現代数学の根本的原理である，公理的論証を学習する。併せて，高等学校では学習しない幾何学があることを認識させる。

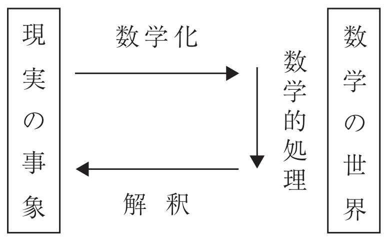
<u>授業の一般目標</u>　ユークリッド幾何学を中心とする初等幾何学を公理的に論証することができるようになり，

それにより論証能力を身に付ける。また，複素数や線形代数学を幾何学の問題解決へ応用することができるようになり，さらに，定木やコンパスだけを使った作図をすることができるようになる。双曲幾何学などの非ユークリッド幾何学を取り扱うことで，公理の重要さを学ぶ。これにより，初等・中等教育における算数・数学の幾何の内容を習熟する。

1.2　視点 2　算数・数学科の認識論的定義

本教科が対象とする数学は，現実の事象から数量，図形などの抽象的概念を抽出し，それら抽象概念相互の関連について明らかにするものである。その内容は大まかに「数，形，変化」に分かれる。概念間の関連を捉え記述するための手段として論理や集合が用いられる。これらは数学の基部をなす。教員養成の算数・数学科が対象とする数学の内容は，理学部におけるような数学そのものの研究を目指したものではなく，教科内容の背景をなす体系である。

数学科においては，数学を現実から切り離されたものとして捉えることは適当ではなく，下図に示す現実の事象との関連も内容に含む必要がある。この関連の重視は，学問としての数学と異なる教科独自の認識である。



学習指導要領の目標との関連：小学校算数の学習指導要領に示された主な目標は，数量や図形についての知識・技能を身につけ，日常の事象について筋道を立てて考え表現する能力を育てることであり，中学校数学の目標も同様である。これらは，上に述べた「数学」およびその「事象との関連」に相当し，上記の基本認識に沿うものである。なお，上図と同様の構造図が，高等学校の学習指導要領解説の中で，事象との関連についての説明のために用いられている[1]。

1.3　視点 3　体系的構造と内容構成

1.3.1　育成すべき教員像

算数・数学科についての基本認識は視点 2 で述べたとおりであるが，特に教員養成においては，以下の資質・能力を備えた教員の育成に資するものを内容として選ぶ必要がある。

備えるべき資質・能力：人間にとっての数学の存在意義・重要性を十分理解した上で，学習指導要領の指示する内容を単に受動的に受け入れるのではなく，算数・数学を教えることの意義を深く理解し，正しい数学観の下に自信をもって指導できる。特に，以下の能力が重要である。

・学校数学の背景にある数学理論を理解し，学習項目間の関連や系統性を捉えて重点を置くべき部分を把握できる。
・数学と現実の事象との繋がりを理解し，事象を数学的に解釈・表現して問題解決する授業を構成できる。
・知的好奇心を呼び起こし学問的にも意味がある教材を工夫してつくることができる。
・知識探究・創造型の授業が実践できる。

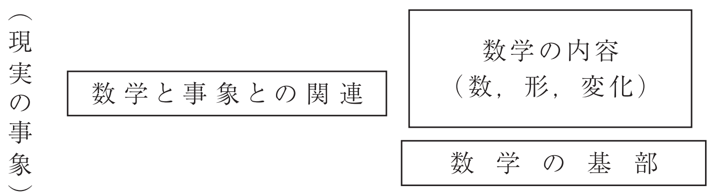
[1] 高等学校学習指導要領解説　数学編・理数編，p.68

・抽象的思考に慣れ，思考を論理的に正しく展開することができる。

1.3.2　算数・数学科の体系

教員養成の教科専門は，学校数学の背後に存在する数学の世界を広く扱うべきものであり，小・中・高の内容を一貫した理念で説明する必要がある。このことは，小学校教員養成の場合でも、小学校以降の数学学習に対する見通しも得られるようにするために重要である。学習指導要領の領域構成は教科専門の体系としては適当ではない。なぜなら，小学校算数と中学校数学の領域構成は，それぞれに適した形で与えられているため両者の整合性が低く，しかも高校では，内容構成が考慮されている科目は「数学Ⅰ」にとどまるからである。育成すべき資質・能力の一つである「背景にある数学理論を理解すること」や「思考を論理的に正しく展開することができること」のためには，理論的な枠組みを備えた体系を元として教科専門科目群を編成することが望ましい。よって，算数・数学科の体系としては，理論的な考察を元とする視点２の認識論的定義から従うものを採用すべきと考える。これにより，小，中，高，大学の算数・数学教科，および学問としての数学を理念的に通して捉え，統一的な視点から見ることができる。

以上より，算数・数学科の体系は，視点２の認識論的定義に従い，下図の枠で囲った３つの柱から構成されるものと考える。



この柱立てにより，小学校から大学までを通した数学の内容構成を，以下のように一貫した形で与えることができる。

柱		小学校	中学校	高　　校	大　　学
数学の内容	数	数と計算 数量関係（式）	数と式	複素数，方程式， 不等式，ベクトル， 行列	代数学
	形	図形 量と測定（図形の計量）	図形	平面幾何，図形の方程式	幾何学
	変化	数量関係（関数）	関数	関数，微積分，数列	解析学
数学と事象との関連		量と測定（図形の計量以外） 数量関係（統計）	資料の活用	確率，統計	数理科学
数学の基部			数学的推論，証明	集合と論理	数理論理学，集合論

1.3.3　内容構成

1.3.1で掲げた資質・能力の育成を図るため，内容選択において重視すべき要素は以下の６項目である。

a　数学の体系性：数学という学問が雑多な数学的事実の寄せ集めではなく，全体が大きな体系をなしていること，すなわち，この体系の中で諸概念が相互に深くつながっていることや，数学概念をさらに抽象化することにより様々な対象が同じ構造をもつものとして統一的に理解できること

b　小学校算数・中学校数学との関連：小学校算数・中学校数学との関連があること
c　事象との関連：我々を取りまく世界の至る所に数学が存在し，数学で世界の一端が理解できること
d　数学の実用性：数学が実生活や社会で応用されていること
e　数学の文化的価値：数学の歴史と美的価値
f　探究的活動：自らの数学的発想力を伸ばすとともに，子どもたちに算数・数学の面白さ・奥深さを伝え，興味・学習意欲を喚起し，授業が活発な創造の場となるよう工夫できる能力を育てること

1.3.4　理学部と異なる点

ア．内容について

① 理学部の授業では，上記の要素のうち通常ａのみが考慮される。
② 理学部が対象とするものは現代の数学のみに限られるが，教員養成系では古代からの数学の発展の全体像について触れる必要がある。
③ 教員養成系では学校数学の橋渡しや数学化プロセスのための事例演習を設けることが望まれる。（要素ｂ，ｆ）

イ．指導方法について

教員養成系では，証明が単に結論が正しいことを確認するに留まる場合には，証明において過度に厳密性に拘ることは避け，内容が直観的に納得できることや仕組みや発想が分かることを重視したい。また，多様な証明を考えるなど様々な視点で見ることができるよう指導することも重要である。

1.4　視点４　学習指導要領の教科内容構成

1.3.2に記した算数・数学科の内容構成表から分かるとおり，小学校算数科の学習指導要領の領域構成は，理念的な指標に基づいて作られておらず，便宜的な点が多く見られる。1.3.2の体系に従って再構成した方が理解しやすくなると考える。例えば，算数の内容は事象との区別があいまいにされているものが多い。領域の一つ「量と測定」の内容のうち図形の計量に関するもの以外はその典型例であるが，これを「数学と事象との関連」として捉え，数学とは切り離して考える方が理の通った理解が得られる。また，分数についても，数学の世界の中で形式的に構成できることを理解しておくことが必要である。数学はあくまで抽象概念のみで構成される世界であるとの認識が大事である。中学校数学の領域構成については，新学習指導要領において，統計が復活し関数が「数量関係」から独立するなど，平成10年度告示のものと比べ大きな改善が見られる。

2　教科内容の開発

2.1　視点１　目標

1.3.1で揚げた能力の育成を目標とする。小学校教員の場合，より具体的に以下のように表現できる。

① 算数の背景にある数学理論を理解し，小学校以降の数学学習に対する見通しも備えた理論展開に従った授業構成ができる。
② 数学と現実の事象の繋がりを理解し，児童が事象を数学的に解釈・表現して問題解決する授業を構成できる。
③ 教材のもつ数学的構造を理解し，児童の知的好奇心を高める教材開発ができる。
④ 教材のもつ数学的な考え方を理解し，児童が問題解決の過程を構築する探究・創造型の授業展開ができる。

2.2　視点２　内容構成の視点

2.2.1　小学校教員養成における算数科の教科内容構成

2.1で掲げた能力①～④の育成のために，1.3.3の６つの要素を取り入れた内容構成が望ましいと考える。①～④のそれぞれに特に関係が深い要素は，①がａ体系性，ｂ算数との関連，②がｃ事象との関連，ｄ数学の実用性，③がｅ文化的価値，④がｆ探究的活動である。これに従って，以下のように内容を構成する。

【ａ数学の体系性，ｂ算数との関連】

ア．算数において，様々な数学概念の表面的な現われ方に影響されず本質に基づいた指導ができることは大切である。このため，算数の背景をなす数学体系について理解し，算数の各内容が元とする数学概念を明確にすることができるような具体的内容を取り入れる。

イ．小学校以降の数学学習に対する見通しも備えた授業構成ができることは重要である。また，児童が不思議だと感じたり疑問をもったりする内容は，より高度の数学に繋がっている。この疑問に発達段階に合わせて分かりやすく答えることができることも重要である。従って，算数の内容が，数学として後にどのように拡張・発展するかが理解できる具体的な内容を取り入れる。

【ｃ事象との関連，ｄ数学の実用性】

数学は，現実の事象から数量，図形などの抽象的概念を抽出し，抽象概念相互の関係について明らかにするものである。しかし，学習者には，事象を一旦抽象化し形式的な処理に慣れると，現実の事象との結びつきを意識しなくなる傾向が見られる。逆に，具体的な事象の表面的な内容に捕らわれすぎて，異なる事象の中にある共通な構造に目が向かず，科学の言語としての数学の有用性に気づかない傾向も存在する。算数及びその背景にある数学の内容と現実の事象，つまり，抽象と具体の関係を重視することの必要性やその捉え方が理解できる具体的な内容を取り入れる。

【ｅ数学の文化的価値】

数学は古くから存在し，今なお発展し続けている文化的な学問である。学習者の知的好奇心を高めることができるよう，教材がもつ面白さや美しさも含め，文化的な価値や数学的構造の美しさを深く理解できる具体的な内容を取り入れる。

【ｆ探究的活動】

算数・数学は既存の知識を基に，論理的に整合性をもつ新たな知識を創造するものである。学習者がそれまでに学んだ数学的な考え方や問題解決の方略を工夫して活用し，これまでに経験したことのない新しい問題の解決の過程を自ら構築する探究・創造型の授業展開ができるよう，教材のもつ数学的な考え方を理解できる具体的な内容を取り入れる。

2.2.2　中学校教員養成における数学科の教科内容構成

1.3.2の表における代数学，幾何学，解析学，数理科学，数学の基部のそれぞれに対応する科目群が必要である。教科内容の構成方針を具体的に示すために，幾何学についての内容構成例[2]を説明する。幾何学は，自然界に見られる形を，ある特徴だけに着目し理想化した概念である「図形」について考える学問である。教員養成系で扱うべき幾何学の内容は，図形の要素や量の扱い方，またその研究手法に応じて以下のような６種類に分かれる。これらを歴史的発展の様子も絡めて扱うことが重要である。それぞれの具体的内容と，重視すべき要素ａ，ｃ，ｄ，ｅに係る例を述べる。ただし，これら要素を以下のように略記する。ａの体系性については，体系的構成の認識を主とする場合は「体系」と記し，概念間の関連を主に考える場合は「関

[2] 松岡・秋田（2009），pp.114-117

連」と記す。ｃ事象との関連，ｄ実用性，ｅ文化的価値は，それぞれ，事象，実用，文化と記す。

① ユークリッド幾何学

平面図形や空間図形がもつ量（長さ，面積，角度など）の間に成り立つ関係を調べる。具体的内容は，中学校・高校の幾何学がなす独自の公理体系，円錐曲線，空間図形，図形の対称性と敷き詰め，共点・共線定理，球面幾何学などである。

・体系：学校で扱う平面幾何学の公理と体系
・関連：円錐曲線の式による表現，三平方の定理が座標空間における距離を与えること。
・事象，実用：放物線や天体の軌道など円錐曲線が重力に従う運動を表すこと，円錐曲線による光線の反射
・文化：和算の幾何問題における三平方の定理の使用

このユークリッド幾何学を出発点として，２つの方向で幾何学が発展してきた。まず，扱う図形の要素や量を捨て去る方向で次の２つの幾何学が生まれた。

② 射影幾何学

空間図形を平面に射影することに関する幾何学である。ここでは，長さ，面積，角度は意味を失う。具体的内容は，空間図形の射影として得られる平面図形，射影に関する不変量，共点・共線定理などである。

・関連：二次曲線の射影による変化
・事象：目で見たり，写真で撮ったりして得られる画像は空間内の形の平面への射影である。
・実用：遠近法

③ トポロジー（位相幾何学）

連続変形によって変わらない性質（図形のつながり具合）を調べる。図形のもつ要素，量ともに意味を失う。具体的内容は，図形の連続変形，オイラーの公式，結び目や曲面の分類などである。

・関連：ベクトル場の特異点
・事象：縞模様の特異点
・実用：鉄道の路線図
・文化：一筆書き，文字の形の特徴，結び目の分類

逆に，幾何学以外の手法を用いて図形の特徴をより細かく見る方向で，次の２つの幾何学が発展してきた。

④ 解析幾何学（座標幾何学）

図形を式で表し，代数学の手法で考察する。具体的内容は，二次曲線，一次変換，等長変換，射影変換などである。

・関連：線型代数学，射影幾何学，複素数平面

⑤ 微分幾何学

図形を関数で表し微分を用いて考察する。具体的内容は，曲線の曲率とその応用などである。

・関連：トポロジーの概念である閉曲線の回転数と曲率の関係
・事象：船などの平衡状態の理解
・実用：高速道路の曲線の形

また，最も新しい幾何学として通常の量概念が定義できない幾何学が生まれた。

⑥　フラクタル幾何学

自己相似を特徴とするフラクタル図形を研究する幾何学である。自然界に見られる図形の多くは，フラクタル図形と解釈する方が適切であることが近年の研究で分かってきている。具体的内容は，自然界におけるフラクタル図形（木の形，海岸線，星の分布等），カオス力学系，フラクタル図形の次元などである。

・関連：相似な部分に分割できる図形はフラクタル図形である。
・事象：自然界における例，カオス現象の背後にあるフラクタル図形
・実用：画像の処理技術

理学部においては，これらのうち③トポロジーと⑤微分幾何学のみを取り上げ，厳密な理論的展開の下に学んでいくことが普通である。教員養成系においては，重視すべき諸要素を盛り込むため，これら6つの幾何学すべてに触れることが望ましい。例えば，幾何学の歴史的発展と体系性について，特に学校数学が扱うユークリッド幾何学がその後どのように発展してきたかを知るためには，これら6つの幾何学全体についての俯瞰的な把握が必要である。また，現実の事象との関連や実用性について理解するためには，ユークリッド幾何学の応用，射影やトポロジーの考え，フラクタル幾何学について知ることが有益である。ユークリッド幾何学から2つの異なる方向に発展してきた幾何学が現代に至って再び結びつきをもつようになったことも取り上げたい。

幾何学関連科目群の構成としては，例えば，以下のようなものが考えられる。授業科目を「幾何学Ⅰ」，「幾何学Ⅱ」，「幾何学Ⅲ」，「幾何学Ⅳ」の4科目とし，「幾何学Ⅰ」では中学・高校における幾何の発展的内容，「幾何学Ⅱ」ではユークリッド幾何学と射影幾何学，「幾何学Ⅲ」ではトポロジー，「幾何学Ⅳ」では微分幾何学とフラクタル幾何学を扱う。解析幾何学は，適宜これらの科目に含める。

2.3　視点3　教材分析

2.3.1　小学校教員養成

2.2.1で内容構成の原理を明らかとしたが，通常，算数の教科専門科目の授業時数は半期のみであり，算数に係るすべての内容を扱うことは不可能である。そのため，実際の授業においては題材を絞りこむ必要が生じてくる。このための最も効果的な方法は，次のような方針に従って題材の絞り込みを行うことと考える。

「教員養成系の学生が，算数・数学の内容について十分に理解していない点や正しく認識できていない点を把握し，その問題点が改善できるものを優先する。」

学生が十分に理解・認識できていない算数・数学の内容は，小学校から始まる算数・数学教育の抱える問題点を明らかにしており，このような問題点を放置したまま学生を卒業させることは看過できることではない。これら問題点の改善を図ることは，算数の教科専門科目で優先的に取り組むべき課題であると考える。

以下では，この方針に従って構成した教材分析例を4例述べる。これらは，いずれも要素「b算数との関連」とともにその他の要素を取り入れたものである。

⑴　数概念の拡大

教員養成系の学生達の中で，「数」が，文字式における文字と同様，抽象的な概念であるとの認識が薄い。算数の内容については，抽象概念である分数が，分数を用いて表される現実の事象自体と混同されがちである。この問題点の改善のためには，分数を抽象的な数学の世界の概念として明確にしておく必要がある。分数は，分割分数，割合分数，量分数など様々な意味で捉えられるものがあるが，数としての分数の概念自体

は一つであり，これら異なる名称は現実の事象における分数の解釈の仕方の違いであるとの認識が大事である。

また，中学校ではこの問題点が，負の数の導入において現れてくる。負の数は，現実の事象の中には存在せず，あくまで抽象世界の中にあることを納得していることが必要である。そこで，中学校・高校に連なる展開を見据え，抽象数学の世界の中で，自然数の概念を形式的に拡大していくことにより，整数，有理数，実数の順に構成する[3]。数体系が，現実の世界から独立した抽象世界の中で構成できることを納得させることがねらいである。この内容は，要素「ａ数学の体系性」のア，イに該当する。

具体的には，まず自然数ａに対し，－ａを記号として形式的に導入し整数を構成する。このように構成された整数上で，加法，減法，乗法を，規則ａ＋(－a)＝０および結合・交換・分配法則が成り立つと約束することにより定義する。同様に，整数ａに対し，1/aを記号として形式的に導入することにより有理数を構成し，規則ａ・(1/a)＝１と結合・交換・分配法則が成り立つと約束することにより，有理数上の加法，減法，乗法，除法を定義する。また，実数を無限小数の集合として構成する。最後に，構成の出発点となった自然数自体も抽象的に構成できることを示す。これについてはペアノの理論があるが，ペアノ理論そのものを多大な時間を費やして解説しても殆ど理解が期待できないため，本格的な取扱いは避け，自然数を空集合から具体的に作り出していく手順の説明のみに止めることで十分であると考える。

⑵　図形の対称性

小学校での図形の扱いは，概念の導入や基礎的性質の説明が中心であり，その面白さや美しさについて触れることは必ずしも十分とはいえない。また中学校や高等学校においても，計量的側面や論証に主眼が置かれ，面白さや美しさについては直接の対象とされていない。そのため，教員養成系の学生にとって，自ら図形の面白さや美しさに触れて幾何の豊かさを知り，さらに，その背後に存在する数学的構造を理解することが，児童の知的好奇心を引き出し探究・創造型の授業が展開できるために必須の素養であると考える。ここでは，その題材として，新学習指導要領で復活した内容である「対称性」を取り上げる。対称性の概念は，線対称・点対称図形，敷き詰め，垂直二等分線などの異なった概念を包括する基本概念であり，数学的見方の一つの大きな柱となるものである。

まず，三角形，四角形，五角形を対称性によって分類すると，以下のようになる[4]。

三角形	線対称：	二等辺三角形	（対称軸１本）
		正三角形	（対称軸３本）
	点対称：	存在しない	
五角形	線対称：	正五角形でないもの	（対称軸１本）
		正五角形	（対称軸５本）
	点対称：	存在しない	
四角形	線対称：	たこ型，等脚台形	（対称軸１本）
		長方形，ひし形	（対称軸２本）
		正方形	（対称軸４本）
	点対称：	長方形，ひし形，正方形	（線対称でもある）
		平行四辺形	（線対称でない）

[3] ここで用いる整数と有理数の構成法は，吾妻・武元・長・松本（1993）の第２章§２とほぼ同一である。
[4] 小学校学習指導要領解説・算数編（p.175）に部分的説明がある。また，小西豊文（2009）は正多角形を対象として同様の考察を行っている(p.93)。

この結果から，例えば，以下のような規則が成り立つことが容易に推測される。このように，対称図形がもつ規則に気づいて，その背後にある仕組みを考えることを最初の課題とする。

⑴線対称について

・対称軸が２本以上ある場合，それらはすべて１点で交わり360°を等分している。従って，線対称なｎ角形の対称軸の本数はｎの約数である。

⑵点対称について

・対称軸を偶数本もつ線対称多角形は，点対称でもある。

・奇数角形は点対称ではない。

これらの規則が成り立つ鍵は，以下の２つの事実である。これらは，合同変換の合成を考えることで導かれ，また図を描いて容易に検証できる。

・対称軸が２本あるとき，片方をもう片方で折り返して得られる直線はまた対称軸となる。

・２本の対称軸が角度ａで交わるとき，図形を角度２aで回転すると元の図形に重なる。

以上の内容は，次のような方向に発展させることができる。

① 有限個の点の集まりなど多角形以外のものについても対称性を考えることにより，垂直二等分線や角の二等分線などを対称性の下に統合して捉えることができる。

② 対称軸が２本以上あり１点で交わっていない場合を考える。このとき，無限本数の対称軸が現れ，図形は無限に広がったものとなる。

合同な多角形による平面の敷き詰めは，幾何の美しさを体験させるため，学校でもよくトピック的に紹介されるものであるが，これは②の特別な場合である。授業では，敷き詰めを実際に作る活動を取り入れ，また，その対称性を分析することにより，模様づくりを楽しみながら対称性の意味を確認させる。

この教材により，図形の面白さ，美しさ，さらに対称性の概念・構造自体がもつ美しさを理解できる。また，学生自身が発見し考察していくよう授業を構成することによって，探究・創造型の授業展開を体験できるものであり，「ｅ文化的価値」と「ｆ探究的活動」の両要素が実現できると考える。また，「ａ体系性」の要素も含まれている。実際，対称性の下に，線対称，点対称，合同，敷き詰めなどの諸概念を統合して理解できる。また，多角形の対称性は，より簡単に扱える頂点の集まりの対称性と同じであることに気づくことの有効性が分かる。すなわち，表面的な現われ方に影響されない本質に気づくことの重要性が理解できる。②の身近な例は，タイル張りや繰り返し模様など数多く存在する。また，万華鏡の仕組みも上述の②で説明できる。このように，この教材には「ｃ事象とのつながり」の要素も含まれている。

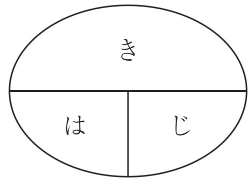
⑶ 単位量当たりの大きさ

ここで述べる教材は，「ａ数学の体系性」と「ｃ事象との関連」に係るものである。小学校第６学年で指導する「速さ」の概念については，学習指導要領解説の中で，速さが道のり÷時間という式で表され，速さと時間，道のりと速さからそれぞれ道のりと時間を求めることができることが説明されている。これに従い，教科書では一般に，内容を３種類の公式

速さ＝道のり÷時間　　　道のり＝速さ×時間　　　時間＝道のり÷速さ

にまとめている。しかし，このことは，速さの概念には公式が３つもあり大変複雑なものであるとの印象を児童に与える結果となっている。しかも，３つの式の形が紛らわしく記憶が難しいため，速さの問題に対して，覚えた公式に数値を代入して解くという安易な方法は役に立たない。このため，公式を覚える便法とし

て，右図に示した「き・は・じ」（または「は・じ・き」）が重宝されており，この方法を指導している小学校教員も少なくないようである。実際，学生達から「これを小学校で習ったので速さの問題が嫌いにならなくて良かった」という声を多く聞いた。



この便法は，答えを出せるという点においては確かに有効なものではあるが，このような公式の暗記に頼ることは，児童の今後の数理的能力の発達に禍根を残すことが危惧される。例えば，「200kmの道のりを車で時速100kmで走るとき，何時間かかるか」というような，概念的理解さえあればすぐ分かる問題に対しても，処理に手間のかかる「き・は・じ」に頼ろうとする態度を生み出してしまう。更に大きな問題がある。速さは距離と時間という二つの量から除法によって作られる量であり，このように異種の量の組み合わせでできる量を内包量という。内包量には多種多様なものがあるが，二つの量から作られるものすべてに「き・は・じ」に相当するものを考えて記憶することは，非効率であるどころか不可能である。速さに対しては，「き・は・じ」で何とか対応できるが，中学，高校と進んで行くとき大きな困難に遭遇することになる。このように，意味理解を怠って公式の記憶に頼る方法には大きな欠陥がある。

速さについては，「単位あたりの量」という概念を確実に理解することによって，公式の記憶に頼らず意味を考えて問題を解き，また，様々な内包量に対応することが可能になる。しかし，以下に示すように，学習指導要領や教科書自身に，この概念とそれに基づく内包量の意味理解を妨げかねない問題点が含まれている。算数科に係る教科専門授業では，この問題点を指摘し，速さをその概念の元となる数学的構造に基づいて考えることの必要性を学生に納得させることが重要である。

問題点１．人口密度と速さの扱いの違いについて

異種の二つの量Ａ，Ｂから除法によって作られる内包量Ｐについては，以下の３用法があり，上述の速さの３つの公式はこれに対応している。

① Ｐ＝Ａ÷Ｂ （第１用法） 商＝被除数÷除数
② Ａ＝Ｂ×Ｐ （第２用法） 被除数＝除数×商
③ Ｂ＝Ａ÷Ｐ （第３用法） 除数＝被除数÷商

学習指導要領解説では，速さの導入の前に，異種の二つの量から作られる同様の量として，人口と面積から得られる「人口密度」を取り上げている。一般に，異種の二つの量が係る事柄において，その状態を数値で表すことは，第１用法，即ち「単位量当たりの大きさ」の概念を用いて割り算により新たな量を求めることでなされる。「人口密度」の導入の目的は，この「単位量当たりの大きさ」の概念を理解させることに絞られており，そのため第１用法のみに焦点が当てられている。しかし，速さについては第１用法に加え，第２用法，第３用法まで展開しており扱いが全く異なる。このことは次のような弊害を生みだす危険性があると考える。

・児童が，人口密度と速さの根底にある考え方は別物で，速さは人口密度とは違って３つも公式がありとても複雑な概念であると感じてしまう恐れがある。
・速さも単位量当たりの大きさであることの理解が薄まる。

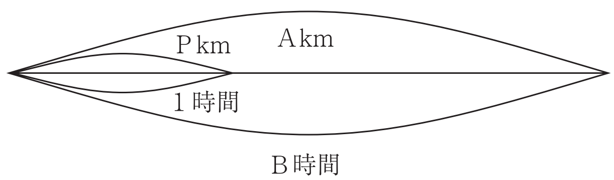
つまり，人口密度も速さも「単位量当たりの大きさ」という同一の概念で捉えることができることの指導が不十分になり，それぞれの現象に依存した指導，つまり，生活経験の中に数学的構造が埋没した指導に陥ってしまう危険性がある。このため，児童には，速さの意味を理解することが難しく，３つの公式が相互に関連のないものと見えてしまう。結果，公式の記憶に走って問題を解こうとする傾向を生み出すことになる。さらに，今回の改定では，これまで同じ第６学年に含められていた人口密度と速さが，それぞれ第５学

年と第６学年と異なった学年で扱われることになり，埋没がさらに深まってしまうと危惧される。

そこで，算数に係る教科専門授業では，人口密度を含め，異種の二つの量から作られる様々な内包量に対し，これらが同じ数学的概念に基づき統一的に扱えるものであることを再認識させるため，第２，第３用法まで展開した議論を行う。

問題点２．異種の二つの量から作られる内包量の構造について

教科書では一般に，速さの３公式を説明するために，次のような線分図を用いている。ただし，実際には，記号Ａ，Ｂ，Ｐのところには，数値や未知数を表す箱が書かれている。



しかし，人口密度については，その説明に線分図が用いられておらず，速さと同じ数学的構造をもつことが分かりづらくなっている。

算数に係る教科専門授業では，異種の二つの量から除法によって作られる内包量については，線分図を描いて考えることが有効な方法であることを理解させる。この視覚的方法により，内包量の定義の元になる単位量当たりの概念を明瞭に捉えることができ，内包量に関する問題を代数的構造に基づき意味を考えて解くことが可能となる。速さの公式は線分図の中の関係として容易に捉えることができ，それらを覚えることや，「き・は・じ」を用いることは，もはや必要なくなる。また，線分図によって，学習指導要領では異なった領域で扱われている，割合，比，比例の概念も同一の構造をもつものとして把握できることについても言及する。

⑷　変化の割合

この教材は，1.3.3の要素のうち，「ａ数学の体系性」に係るものである。教員養成系大学において，「変化の割合は，グラフをかくために学習するものである」との誤解をもっている学生が少なくないように思われる。これは，中学校で変化の割合を用いて一次関数のグラフをかく経験，さらに，高等学校で微分係数を利用して関数のグラフをかく経験が大きく影響しているためと考えられる。

関数学習の主な目的は，小学校で学習する比例・反比例から始まり中学校以降に学習していく様々な関数の変化の特徴を捉え理解することである。関数のグラフはそのための手段に過ぎず，「変化の割合」の導入も変化の特徴を捉えるためであり，グラフをかくことが目的ではない。算数に係る教科専門科目では，この正しい認識を定着させることが必要である。特に，「変化の割合」の概念によって，比例・反比例を含め，関数の変化の特徴をより深く捉えることができることを理解させることが重要と考える。さらに，変化の割合が高等学校で学習する微分の概念に関連していることも重視したい。

新学習指導要領解説では，比例の見方を以下のように示している[5]。

㋐　二つの数量Ａ，Ｂがあり，一方の量が２倍，３倍，４倍，…と変化するのに伴って，他方の数量も２倍，３倍，４倍，…と変化し，一方が $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…と変化するのに伴って，他方も $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…と変化するということ。

[5] 小学校学習指導要領解説・算数編，p.177

(イ) (ア)の見方を一般的にして，二つの数量の一方がm倍になれば，それと対応する他方の数量はm倍になるということ。

(ウ) 二つの数量の対応している値の商に着目すると，それがどこも一定になっているということ。

反比例も同様に３つの見方が示されている。比例・反比例の導入では(ア)の意味が用いられ，学習を通して(イ)と(ウ)の意味を児童に気づかせる指導順序が一般的である。

比例・反比例については，日常の事象における伴って変わる二つの数量の関係を表に表し，２量間のきまりを見つけることを通して比例関係を見いだす学習活動が行われる。その後，比例・反比例を表す式，そして，グラフの学習へと展開する。一般に，表の見方には以下の三通りがある。

・横の見方１（同種の二つの量の割合に着目した見方）

(ア)と(イ)に気づかせるために，一方の量が２倍，３倍，４倍，…と変化するのに伴って，他方の量がどのように変化するかを調べる見方である。

水の量(ℓ)	1	2	3	4	5	…
深さ(cm)	2	4	6	8	10	…

・横の見方２（変化の割合に着目した見方）

比例定数に気付かせるために，一方の量が１増えると，他方の量がどのように変化するかを調べる見方である。学習指導要領解説には，この見方は示されていない。

水の量(ℓ)	1	2	3	4	5	…
深さ(cm)	2	4	6	8	10	…

・縦の見方（関数の対応に着目した見方，異種の二つの量の割合に着目した見方）

(ウ)に気付かせるために，順序対の関係を調べる見方である。この見方においても，比例定数に気付かせることができる。

水の量(ℓ)	1	2	3	4	5	…
深さ(cm)	2	4	6	8	10	…

横の見方１は，小学校での比例・反比例の定義の導入にとって大切な見方であるが，中学校以降の関数学習では活用されない。一方，横の見方２の方は，算数教科書では扱っていないことが多いものの，比例・反比例の理解自体を深め，また，中学校以降の関数や高等学校での微分に関係するため，その素地となる大切な見方である。

比例・反比例の指導においては，それらの特徴を，表，グラフ，式を関連づけながら調べ問題解決することが重視されている。一般の関数の場合も，表・式・グラフを相互に関連づけて関数を理解することが大切である。学校図書の教科書（平成10年度）は，変化の割合を基にした表の横の見方２と縦の見方から比例定数を求めている。一方，比例・反比例のグラフの学習では，表に示された値や式から数表を求めてグラフをかく方法が取られている。この方法に加えて，変化の割合を基にした横の見方２とグラフの概形との関係を考察することにより，表・式・グラフの関係をより豊かに理解することができると考える。「変化の割合」というメガネで表・式・グラフ相互の関係を理解することが大切である。

教材例１．変化の割合を元に表・式・グラフの関係を調べることにより，反比例の特徴を理解する教材例

反比例の変化の割合を表や式から求めることにより，反比例の特徴を考える。変数の値が大きくなれば変化の割合の分母が大きくなるので減少する変化がゆるくなることを理解することができる。

教材例２（横の見方２の発展）．

変化の割合自体を新たな関数と見なして，さらにその変化の割合を求め，表・式・グラフの関係を調べることにより，元の関数の特徴を捉える。多項式関数の場合，変化の割合を２回とって一定となれば二次関数となることが分かる。このことは，一般の多項式関数に拡張できる。また，微分の概念と関連づける。

2.3.2　中学校教員養成

「初等幾何」に関する教材分析を行う。初等幾何は、古代・近代に発展したユークリッド幾何や射影幾何を中心とするものであるため，理学部で扱われることは殆どない。一方，教員養成系では，学校で学ぶ平面幾何の直接的な発展であることから，教員免許に必要な教材として広く採用されている[6]。しかし，単に初等幾何の定理を順々に学んでいくだけでは，学校での幾何の世界が更に大きく発展していくことを知るのみに留まり，教員としての資質・能力の養成に貢献するには不十分であろう。そこで，1.3.3に掲げた６つの要素を重視した内容を中心に授業を再構成する[7]。

【ａ体系性】

ユークリッド幾何の構造・特性を取り扱う。古代ギリシャで発展したユークリッド幾何学は，公理体系による構成と非計量的であること（量を数値化せず扱うこと）という２つの大きな特徴をもつことを説明する。さらに，中学・高校の平面幾何はこの強い影響下にあり，非計量的で，実質的に独自の公理系（直角がすべて等しいこと，平行線と同位角の関係，三角形の合同・相似条件）上に構成されているものとみなせることを示す。この構成を説明するためには，中学・高校の平面幾何の全項目間の関連を図に表して示すことが有効である。さらに以下の説明を加える。中学・高校の平面幾何は論証を主とするが，その理由として論証能力の涵養が挙げられる。しかし，この理由のみでは，例えば二等辺三角形の底角が等しいなど，生徒にとっては直観的に明らかでわざわざ証明する必要を感じないものまで，なぜ証明させるのかといった疑問を説明できない。これは，中学・高校の平面幾何が一つの公理系からすべてを導くという構成をとっているため，たとえ自明なことであっても公理系に含まれないものはすべて証明が必要となることから説明できる。ただし，中学・高校で採用されている公理系は，学校での内容に到達するまで多くの準備を費やす必要のあるユークリッドの公理系ではなく，学校での使用に適したものが選ばれていることを注意する。

【ｃ事象との関連，ｄ数学の実用性，ｅ文化的価値】

幾何学が単に教科書の中にのみ存在する世界ではなく，現実の問題と密接に結びついていることを理解させることのできる題材を選ぶ。一例として，物はどう見えるか，どう映るかという問題を，射影の概念を通して考える。例えば，地面に描かれた図形について，それを撮った写真を元に考えさせる。長方形の土地を直線で２つに分割するとき，どちらの面積が大きいかを写真から判定する問題は，写真上で土地の対角線を作図すれば解ける。また，地面に置かれた棒を撮った写真において，棒の等分点の像を求めることは，平行四辺形の性質や平行線と線分の比の関係を用いてできる。このように，現実的な問題に，学校で学ぶ幾何の基本的な学習内容が姿を現してくる。また，机の上に置いた皿は常識的には楕円に見えると思われているが，改めてその理由を考えると，手前の部分が拡大し奥の部分が縮小して見えるため楕円であることの方が疑わしい気もしてくる。この疑問を，解析幾何を用いて解くことにより，幾何の問題に代数を用いることの威力を体験させる。また，放物線が楕円に見えるような少し意外な例も取り上げる。さらに，地面に置かれた直方体の射影図を描くとき，上面と下面にある８本の辺のうち，７本は平行線の像が地平線で交わることを利用した作図によって求める必要があるが，最後の１本は作図を必要とせず自動的に決まるという不思議な現象に気づくが，この現象はデザルグの定理を用いて説明することができることを示し，射影幾何の定理と遠近法の関連を示す。以上紹介したような射影に関する問題は，学校現場では直接扱えない部分も多いが，学生の大きな興味を引いて強い印象を残し，数学が現実世界と切り離された世界ではないことの認識をもった教師を育てることに効果があるものと考える。

---

[6] 丹羽・松岡・川崎・伊藤（2010），p.96

[7] 丹羽・松岡・川崎・大竹・伊藤（2010），pp.118-120

【ｆ探究的活動】

探究的活動で用いる発展的内容の題材例としては，例えば四角形の合同条件を求めさせるなど，中学・高校における設定を少し変えたり一般化したりすることで容易に作られ，しかも結果の予想が難しく興味をそそるようなオープンエンド的課題を選ぶ。また，三平方の定理の様々な証明法や，和算の幾何問題への応用などを取り上げ，中学・高校の幾何内容が含む豊かさを示す。「ｃ事象との関連」の内容についても，演習を中心に進めることが望ましい。授業時間の半分程度を探究的活動としての演習に割り当てることが，教員としての資質・能力の養成により有効であろう。その余裕がない場合でも，授業内容を精選して演習の時間を大幅に取り入れることが望ましいと考える。演習に多くの時間がとられ授業で扱える知識の全体量は少なくなるが，自分の頭で工夫させ，また学生間で議論させることにより，より深い理解と多様な発想を育てることが最も大事なことと考えるからである。

3　シラバス例

3.1　小学校教員養成

１．授業科目　「算数」

２．目的及び主旨　　算数科担当教員として必要な資質・能力である，小学校算数の内容やその背景にある数学理論を理解し，算数の授業において，児童が事象と数学の関連を見出して数学的方法にもとづいて問題解決したり，数学を探究・創造したりできるような授業を構築・実践できる力を育成する。

３．到達目標

① 算数の背景にある数学理論を理解し，算数の内容を中学校以降の数学内容との関連性の観点から見直すことができる。
② 数学と現実の事象との繋がりについて理解し，事象とそこに現れる数学的構造を区別して理解することができる。
③ 児童の知的好奇心や問題解決力を高める教材に必要な数学的構造を理解することができる。
④ 探究・創造型の授業に効果的に用いることのできる教材に必要な数学的考え方を理解することができる。

４．授業内容（15回）

① 数と計算１（自然数とその計算）
② 数と計算２（数の演算と拡張：負の整数の導入）
③ 数と計算３（数の演算と拡張：分数の導入）
④ 数と計算４（数の演算と拡張：実数の導入）
⑤ 量と測定１（量の分類と測定）
⑥ 量と測定２（量の積をどう考えるか）
⑦ 量と測定３（異種の二つの量の割合）
⑧ 図形１（対称性）
⑨ 図形２（対称性の相互関係）
⑩ 図形３（敷き詰め）
⑪ 図形４（空間図形）
⑫ 数量関係１（関数概念と比例，反比例）
⑬ 数量関係２（変化の割合を元にした表・式・グラフの関係）
⑭ 数量関係３（変化の割合の発展：多項式関数の特徴を捉える）
⑮ 統計（３つの代表値の特徴）

５．教材　　小学校算数の教科書及び題材に関わる文献
６．授業形態　講義は一斉授業の形態，演習・討議は小グループの形態を取り入れる。

3.2　中学校教員養成

教員養成において重視すべき６つの要素をすべて取り入れた中学校教員養成のシラバス例を述べる。ただし，この授業には，要素「ｆ探究的活動」の部分に時間が取られるため，扱える知識量がかなり少なくなるという短所がある。そのため，少ない時間の中で様々な知識も効率よく提供できるよう工夫をしていくことが必要である。なお，要素ａ～ｆに該当する部分を波線で示し，対応する要素を記号で示した。

１．授業科目：「初等幾何」
２．目的及び主旨：
平面幾何における近代までの発展について講義する。中学・高校における平面幾何[b]の内容がもつ歴史的特性と全体構造を把握[a,b]し，それが公理体系の一つの雛型を与えていることを理解する。また，学校で学ぶ内容を様々な方向に容易に発展させていく[f]ことが可能であることを理解する。幾何学が身近な世界と結びついている[c,d]ことを示すため，物がどのような２次元図形として見えているかという問題を取り上げ，射影の概念を通して考える。さらに，射影幾何学のもつ独特の美しさ[e]に触れる。
３．到達目標：
① 古典的なユークリッド幾何と，射影で形を見る射影幾何を理解し，それらの本質的な面を説明できる。
② 中学・高校の平面幾何の特性，構造，美しさ・面白さを理解し説明できる。
③ 物がどのように見えるかという問題を，幾何学を用いて考えることができる。
４．授業内容（15回）
① ギリシャ幾何学の特徴と中学・高校の平面幾何の内容の公理体系
② 四角形の合同条件
③ 多角形の合同条件
④ 三平方の定理の様々な証明
⑤ 三平方の定理の様々な証明（続き）
⑥ 和算の幾何問題への三平方の定理の応用
⑦ その他の応用（折り紙数学など）
⑧ チェバ・メネラウスの定理
⑨ その他の定理・問題
⑩ 物はどう見えているか－射影の概念－
⑪ 直線でできた図形の射影と遠近法
⑫ 円はどう見えるか
⑬ 射影幾何学－射影で不変な性質
⑭ 射影に関する複比の不変性
⑮ 複比を用いた定理の証明

3.3　試行授業

算数に係る教科専門科目について，以下のように試行授業を行った。本授業は，教材分析2.3.1⑶「単位量当たりの大きさ」の内容を含むものである。

授業科目：「算数」(履修年次２年，小学校専修　必修，中学校専修　選択)
実施日：５月31日　受講者数：104名
内容：⑦量と測定３（異種の二つの量の割合）

評価　本研究の目的は，「数学の理解を深化させ，その効果が授業実践に現れるような内容を構築する」ことである。授業観察者から，この趣旨に賛同が得られ，本授業内容はこの目的に対し具体的な成果を上げうるものと評価された。

謝辞：本研究に対し有益なご助言をいただきました上越教育大学の布川和彦教授に深く感謝いたします。

参考文献一覧

文部科学省（2009）「高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編」
松岡　隆・秋田美代（2009）「数学科の教科内容の構成原理と枠組み」，教育実践から捉える教員養成のための教科内容学研究（西園芳信・増井三夫編著），風間書房
吾妻一興・武元英夫・長宗雄・松本紘司（1993）「教育系のための数学概説」，培風館
文部科学省（2008）「小学校学習指導要領解説 算数編」
小西豊文（2009）「平成20年改訂 小学校教育課程講座・算数」，ぎょうせい
丹羽雅彦・松岡　隆・川崎謙一郎・伊藤仁一（2010）「教員養成大学・学部の数学専門科目の講義内容に関する調査の結果とその考察」，数理解析研究講究録1711巻，pp.89-105
丹羽雅彦・松岡　隆・川崎謙一郎・大竹博巳・伊藤仁一（2010）「中学校・高等学校の数学教師の養成における数学専門科目の標準的なモデルの構想」，数理解析研究講究録1711，pp.106-129